

应用算术平均数和调和平均数求平均速度的局限性

齐春法 张磊

(山东师范大学 物理与电子科学学院, 山东 济南 250014)

摘要 平均数用来描述一组数据的平均水平. 平均速度是平均数的一种, 可用来描述学习或工作进展的平均慢程度, 是表征学习或工作质量的一个重要指标. 从实例出发论证了用算术平均数和调和平均数求解平均速度的局限性, 进而指出更基本, 更普遍, 更准确解决平均速度问题的方法.

关键词 平均速度, 调和平均数, 算术平均数

中图分类号 G414.14 **文献标识码** A **文章编号** 1672-6634(2006)01-0088-02

1 问题提出

在教育与心理学的数据统计分析中, 经常会遇到求解平均阅读速度和解题速度一类的变量, 其一般的解决方法是用调和平均数, 即用

$$\bar{X}_H = 1/(1/X_1 + 1/X_2 + \dots + 1/X_N)/N = N/\sum 1/X, \quad (1)$$

求解(公式中各量的含义可通过下面的例题看出). 但通过下面几个实例不难看出应用调和平均数以及算术平均数求解平均速度的局限性.

例题1 在一个学习试验中, 统计了六名被试完成相同的10道作业题所用时间分别为0.8 h, 1.0 h, 1.2 h, 1.5 h, 2.5 h, 5.0 h. 计算这6名被试平均完成这10道作业题的速度^[1].

一般的教育与心理统计学教材中该类问题的解法是, 先计算六名被试在单位时间内完成的作业题数目: $X_1 = 10/0.8 = 25/2$, $X_2 = 10/1.0 = 10$, $X_3 = 10/1.2 = 25/3$, $X_4 = 10/1.5 = 20/3$, $X_5 = 10/2.5 = 4$, $X_6 = 10/5 = 2$. 再把 $N = 6$ 和 $\sum 1/X_i$ 代入调和平均数公式得: $M_H = 1/(1/6 \times 6/5) = 5$ (题/h). 即6名被试平均完成作业的速度是5题/h. 且有 $S_1 = 5 \times (0.8 + 1.0 + 1.2 + 1.5 + 2.5 + 5) = 60$ (题) = S , 符合实际. 这时的算术平均数为 $M_{H2} = (X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6)/6 = 7.25$ (题/h). 有: $S_2 = 7.25 \times (0.8 + 1.0 + 1.2 + 1.5 + 2.5 + 5) = 87$ (题) $\neq S = 60$ 题, 不符合实际. 这是否说明只能用调和平均数求平均速度, 而不能用算术平均数呢?

例题2 若在上面的学习试验中, 6名被试在2h的解题量, 依次为24题, 20题, 16题, 12题, 8题, 4题. 试问这6名被试平均每小时解多少题?^[1]

按照与上面相同的求法, 先求六名被试单位时间内的解题数目 $X_1 = 24/2 = 12$, $X_2 = 20/2 = 10$, $X_3 = 16/2 = 8$, $X_4 = 12/2 = 6$, $X_5 = 8/2 = 4$, $X_6 = 4/2 = 2$. 然后用调和平均数求6名被试平均每小时的解题数目, 得 $M_H = 1/[(1/12 + 1/10 + 1/8 + 1/6 + 1/4 + 1/2)/6] = 720/147 = 4.9$ (题/h).

不难验证该结果不正确. 因为原题中6名被试的解题总量为 $S = 24 + 20 + 16 + 12 + 8 + 4 = 84$ (题). 若6名被试平均解题速4.9题, 则在2h内, 他们解题的总量应是: $S_1 = 4.9 \times 2 \times 6 = 58.8$ (题) $\neq S = 84$ 题. 可是其算术平均数为 $M_{H2} = (X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6)/6 = (12 + 10 + 8 + 6 + 4 + 2)/6 = 7$ (题/h). 有 $S_2 = 7 \times 2 \times 6 = 84$ (题) = S 符合题意. 可见结果与例题1正好相反, 即用调和

平均数不行,而用算术平均数不对.我们再来看一个例题.

例题3 上面的学习试验中,若6名被试依次用2小时解24题,1小时解10题,0.5小时解4题,1小时解6题,0.5小时解2题,1小时解2题.试问这6名被平均每小时解多少题?

与例题2相同六名被试单位时间内的解题数目依然为 $X_1 = 24/2 = 12, X_2 = 10, X_3 = 4/0.5 = 8, X_4 = 6, X_5 = 2/0.5 = 4, X_6 = 2$.于是,用调和平均数求6名被试平均每小时的解题数目也相同,有 $M_H = 4.9$ (题/h).但这时6名被试的解题总量为 $S = 24 + 10 + 4 + 6 + 2 + 2 = 48$ (题).显然 $S_1 = 4.9 \times (2 + 1 + 0.5 + 1 + 0.5 + 1) \approx 29$ (题) $\neq S = 48$ 题.且其算术平均数 $M_{H2} = 7$ (题/h),也有 $S_2 = 7 \times (2 + 1 + 0.5 + 1 + 0.5 + 1) = 42$ (题) $\neq S = 48$ 题.可见该问题中,两种方法都不适用.

2 问题分析与解决

上面的三个例题从本质上看好象并没有什么不同,而只是叙述问题的形式稍有差异,这在例题2和例题3中表现得最为明显.然而为什么求出的结果会有这么大不同呢?分析问题的关键在于搞清楚调和平均数与算术平均数公式的来源.这实际上是借鉴了物理上平均速度的概念:平均速度 = 总路程 / 总时间.借鉴物理上定义平均速度的方法,这里可将平均速度的公式定义为

$$\text{平均速度} = \text{总工作量} / \text{总时间} = (X_1 t_1 + X_2 t_2 + \dots + X_N t_N) / (t_1 + t_2 + \dots + t_N), \quad (2)$$

式中 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_N$ 分别表示各段过程的平均速度,即各段过程中或不同被试单位时间完成的工作量,如上面例题中6名被试单位时间完成的题目数; t_1, t_2, \dots, t_N 表示完成各段工作任务或不同被试所需要的时间,而 $X_1 t_1, X_2 t_2, \dots, X_N t_N$ 表示各段工作量或不同被试所完成的工作量.

分析用(2)式表达的一般形式的平均速度公式,我们发现有两种非常有趣的现象:(1)当完成各段作用时间一定,即 $t_1 = t_2 = \dots = t_N$ 时,这时有平均速度 $= (X_1 t_1 + X_2 t_2 + \dots + X_N t_N) / (t_1 + t_2 + \dots + t_N) = (X_1 + X_2 + \dots + X_N) t / N t = (X_1 + X_2 + \dots + X_N) / N$ 即平均速度等于速度的算术平均值.例题2中6名被试都是工作了两个小时,恰好满足这个条件,所以用算术平均值求解正好符合实际.(2)当各阶段工作量一定或各被试完成相等工作量,即 $X_1 t_1 = X_2 t_2 = \dots = X_N t_N = X t$ 时,则,平均速度 $= (X_1 t_1 + X_2 t_2 + \dots + X_N t_N) / (t_1 + t_2 + \dots + t_N) = N X t / (t_1 + t_2 + \dots + t_N) = 1 / [1/N(1/X_1 + 1/X_2 + \dots + 1/X_N)]$,这就是调和平均数公式(1).可见调和平均数只是一般平均速度公式(2)的一种特殊情况.且只有在满足这第二种情况的条件下,用调和平均数才能得到正确的答案.如在例题1中,各被试都完成同样的10道作业题工作量相等,满足这里的条件,故用调和平均数求解是正确的,而用算术平均数则不行.

当 $X_1 = X_2 = \dots = X_N = X$ 时,则恒有平均速度 = 总工作量 / 总时间 $= (X_1 t_1 + X_2 t_2 + \dots + X_N t_N) / (t_1 + t_2 + \dots + t_N) = X(t_1 + t_2 + \dots + t_N) / (t_1 + t_2 + \dots + t_N) = X$,这是指各被试单位时间做题数目相同的情况或各阶段工作进展状况一样,显然这时的平均速度也就是每个被试的解题速度或各阶段工作的速度.

实际上,就一个被试也可以求平均速度,这就是上面所说各阶段的含义.如一个被试根据实际需要分成若干阶段才能完成某一项工作,当然各阶段的工作速度可以相同也可以不相同,这时我们就可以求他工作中总的平均速度,并作为评价其工作质量的一个指标.当各阶段是按相同时间分段时,则各阶段速度的算术平均数就是其工作的平均速度;而当各阶段是按相等工作量分段时,则用调和平均数平均速度.根据以上的分析可见,在求平均速度一类的变量时,可以依据不同的题设条件选择算术平均数或者调和平均数求解,但也可以直接应用一般公式(2)求解,如在上面的例题中,其中例题1: $M_H = \text{总工作量} / \text{总时间} = (10 \times 6) / (0.8 + 1.0 + 1.2 + 1.5 + 2.5 + 5) = 5$ (题/h).例题2: $M_H = \text{总工作量} / \text{总时间} = (24 + 20 + 16 + 12 + 8 + 4) / (2 \times 6) = 7$ (题/h)容易验证该结果都符合实际.而在例题3中,则只能应用公式(2)求解,结果如下: $M_H = \text{总工作量} / \text{总时间} = (24 + 10 + 4 + 6 + 2 + 2) / (2 + 1 + 0.5 + 1 + 0.5 + 1) = 8$ (题/时),验证结果: $8 \times (2 + 1 + 0.5 + 1 + 0.5 + 1) = 48$ (题) = S ,符合实际.由此可见,算术平均数和调和平均数都可用来求解平均速度问题,但平均速度的一般定义公式(2)则应用更普遍,用来解决速度类问题也更简洁,更准确,更方便.

(下转第103页)

4.1 完善国家能源供应系统

我国农村能源系统所需求的50%常规能源来自国家能源系统,其中包括全部石油、2/3的电力,所以我国常规能源系统以其供应的数量和质量制约农村能源系统的发展.完善国家能源供应系统对农村能源的供应意义重大.国家能源系统的完善包括三方面,一是供应的连续性,能源作为动力,必须保证连续不断供应,以适应生产需要,如果能源时断时续,必须造成生产损失;二是要及时供应,农业用电,时令性很强,在抢收抢种和干旱灌溉时,如果能源供应不上,必会造成重大损失;三是合理性,品质质量配套供应要对路,不能以次充优.

4.2 合理开发利用新能源和可再生能源

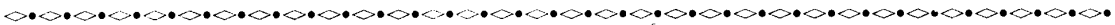
必须意识到,随着国家能源供需矛盾的愈加突出,国家不可能(事实上也不能)拿出大量的常规商品能源来支持农村能源的建设,所以合理开发利用清洁的新能源和可再生能源如太阳能、风能、地热能、生物质能、沼气等,有利于充分发挥我国家村能源资源的优势.

4.3 节约能源

节能也就是合理利用能源.从能源开发到利用的各个环节,都存在节能问题.我国要使节约能源为继煤炭、石油、水利、核能之后的“第五能源”,节能工作必须常抓不懈.为此,一方面要提高用能水平,提高能源利用热效率;另一方面要加强用能管理,大力发展低能耗劳动密集型产业,至少可以节省30%~50%的能源.这样就能在不增加能源总量投入的情况下,实现有效能源消费数量翻番.总之,我国农业的能源支持系统建设为缓解农村地区能源供不应求,减少资源浪费,保护环境等方面已发挥了很大作用,并将在今后农业可持续发展战略中发挥更大的积极推动作用.

参 考 文 献

[1] 中国农学会. 中国农业可持续发展研究[M]. 北京: 农业出版社, 1998, 10.



(上接第89页)

3 结 论

平均数作为一组数据的典型代表用来描述这组数据的平均水平.在学习或任何一项工作中,速度都是表征学习或工作成效的一个非常重要的指标.因此,我们不仅关心学习或工作完成的质量,还关心完成得快慢情况.但许多时候,尤其在一项工作需要一个团队集体协作才能完成的情况下,仅仅是其中的某一个或几个个体的速度快甚至又快又好还是不够的,我们更关心的是团队工作整体的进展情况,这就涉及平均速度问题.平均速度是平均数的一种,是学习或工作快慢的平均水平,用来说明或表征整个工作或学习的总的进展情况或快慢程度.所以,调和平均数作为描述速度平均的一个平均数是一个重要概念,也是为什么教育和心理统计学教材都非常重视介绍这一概念的原因.

鉴于目前通用的教育与心理统计学教材中普遍使用调和平均数平均速度一类变量.但通过上面的分析,我们知道应用调和平均数求平均速度是有条件的,这就是各段工作量要相等或各被试都完成相同的工作量(需要的时间可以不同),如例题1中的6名学生在不同的时间内都完成了相同的10道作业题,就满足这一条件,所以用调和平均数求解符合实际.离开这一条件,应用调和平均数求平均速度就会出现错误,并会误导学生.因此对调和平均数的学习应注意其适用条件.

事实上,可以考虑放弃调和平均数的定义1,而直接应用更一般的平均速度的定义2式.从上面的计算可见,这样能使问题更简单,还更准确.可以说绕开平均速度的一般定义2,而用1式是舍近求远,把问题搞复杂了,并且用调和平均数求解还容易出现错误,给后续工作带来不必要的麻烦.本文的意义就在于指出用调和平均数等求平均速度的局限性以及用平均速度的一般定义求解平均速度的必要性和重要意义.

参 考 文 献

[1] 张厚粲,徐建平. 现代心理与教育统计学[M]. 北京:北京师范大学出版社,2004. 10,76~77.